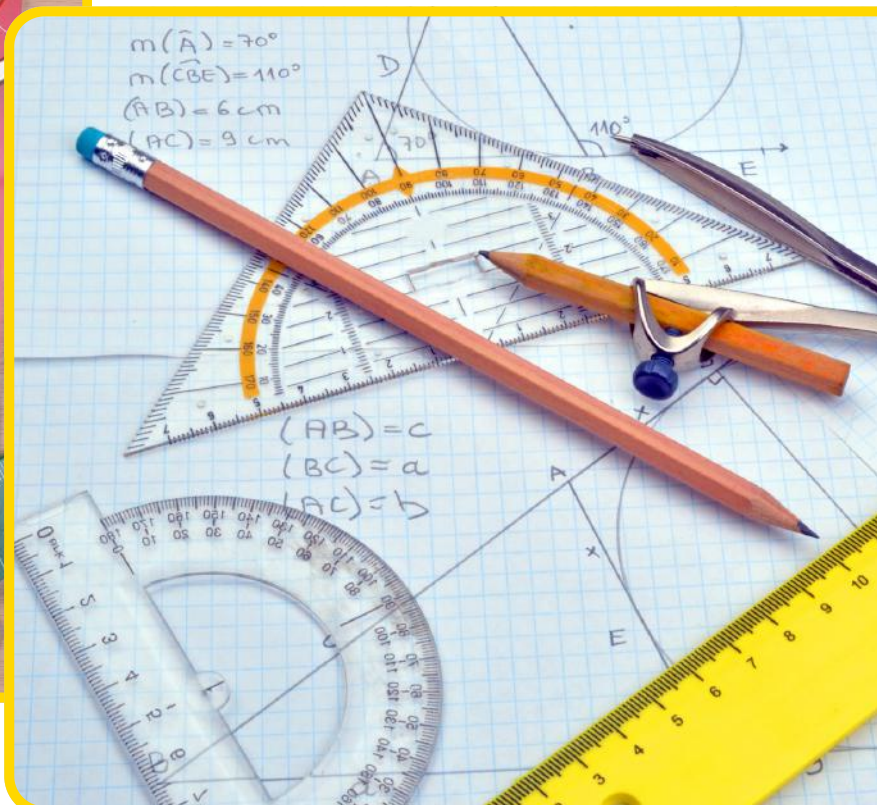


Олімпіадний тренажер з математики для 8 та 9 класів НУШ



Долучайтесь до вайбер-спільноти
для вчителів математики



Завдання для 8 класу

Варіант 1.

1. (3 бали) Розв'язати рівняння $|7 - |3 - 2x|| = x + 1$.
2. (5 балів) Якщо до запису деякого натурального числа дописати справа цифру 7 і до утвореного таким чином числа додати потроєне початкове число, то отримаємо число 657. Знайти початкове число.
3. (5 балів) Побудувати графік функції

$$y = \frac{4x - x^2}{x - 4} - \frac{x^2 - 16}{x + 4}.$$

4. (5 балів) $ABCD$ — квадрат. На стороні BC побудовано рівносторонній трикутник BCE назовні квадрата. Знайдіть кут AED .
5. (7 балів) Доведіть, що серед будь-яких восьми натуральних чисел можна вибрати два, різниця яких ділиться на 7.

Варіант 2.

1. (3 бали) Розв'язати рівняння
2. (5 балів) Знайдіть усі трицифрові натуральні числа, сума цифр яких дорівнює 12, а різниця між самим числом і трицифровим числом, записаним тими самими цифрами у зворотному порядку, дорівнює 396.
3. (5 балів) Побудувати графік функції

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2} + |x - 1|.$$

4. (5 балів) $ABCD$ — квадрат. На стороні AB зовні квадрата побудовано рівносторонній трикутник ABE . Знайдіть кут AEC .
5. (7 балів) Доведіть, що серед будь-яких п'яти натуральних чисел можна вибрати кілька (одне або більше), сума яких ділиться на 5.

Відповіді та вказівки

Варіант 1.

1. 3; 11.

2. Позначимо початкове число x . Якщо до цього числа дописати справа цифру 7, отримаємо $10x + 7$.

За умовою: $10x + 7 + 3x = 657$. Звідси $x = 50$.

3. Графіком є пряма $y = 4 - 2x$ з двома виколотими точками: $(-4; 12)$, $(4; -4)$.

4. 30^0

5. При діленні натурального числа на 7 можливі лише такі остачі:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Отже, існує лише **7 класів остач**. Маємо 8 натуральних чисел. За принципом Діріхле принаймні два з них матимуть однакову остачу при діленні на 7.

Варіант 2.

1. $-\frac{5}{3}$; 3.

2. Нехай число має цифри a, b, c . Тоді саме число: $100a + 10b + c$.

Число, записане у зворотному порядку:

$100c + 10b + a$. За умовою:

$$100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 396.$$

Після спрощення: $a - c = 4$.

Також сума цифр дорівнює 12: $a + b + c = 12$.

Оскільки $a = c + 4$, маємо $b + 2c = 8$.

Переберемо можливі варіанти для c і визначимо a і b .

Отримуємо числа: 561, 642, 723, 804.

3. Графік складається з: променя горизонтальної прямої $y = 3$ при $x < 1$; променя прямої $y = 2x + 1$ при $x \geq 1$; виколотої точки $(2; 5)$.

4. 45^0

Відповіді та вказівки

5. Нехай дано п'ять натуральних чисел:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.$$

Розглянемо послідовні суми:

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

При діленні кожної з них на 5 можливі остачі: 0, 1, 2, 3, 4.

Можливі 2 випадки:

- 1) Одна з сум S_k ділиться на 5. Тоді шуканий набір — числа $a_1, \dots, a_k$.
- 2) Жодна із сум не ділиться на 5. Тоді кожна з них при діленні на 5 дає остачу 1, 2, 3 або 4. Сум п'ять, а можливих остач лише чотири. За принципом Діріхле знайдуться дві суми S_i і S_j ($i < j$) з однаковою остачею. Їхня різниця ділиться на 5: $S_j - S_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j$.

Отже, числа $a_{i+1}, \dots, a_j$ — це непорожній набір (у ньому щонайменше одне число, бо $j > i$), сума якого ділиться на 5.

В обох випадках потрібний набір існує.

$$1 + 2 = 3$$

Завдання для 9 класу

Варіант 1

1. (3 бали) Дано довільний трикутник ABC . Розріжте трикутник на три частини так, щоб із них можна було скласти паралелограм.

2. (5 балів) Побудуйте графік функції

$$y = \sqrt{x^2} - 2x.$$

3. (5 балів) Доведіть нерівність $(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$.

4. (5 балів) Знайдіть усі значення параметра q , за яких для коренів рівняння

$$3x^2 - 6x + q = 0 \text{ виконується умова } x_1^2 + x_2^2 = 6.$$

5. (7 балів) На колі з центром O позначено чотири точки A, B, C, D так, що хорди AB і BC є перпендикулярними. Знайдіть градусні міри кутів AOC і ADC .

Варіант 2

1. (3 бали) Розрізати довільний опуклий чотирикутник на 4 рівних частини так, щоб з них можна було скласти паралелограм.

2. (5 балів) Побудуйте графік функції

$$y = \frac{2x^2 - 4x}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}.$$

3. (5 балів) Доведіть нерівність: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ де a, b, c – будь-які дійсні числа.

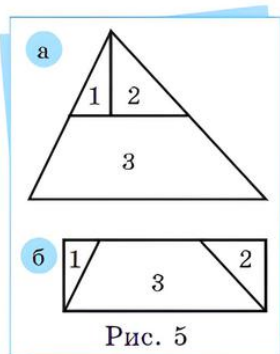
4. (5 балів) Знайдіть усі значення a , за яких корені рівняння

$$x^2 - (a^2 - 9)x + a + 2 = 0 \text{ є протилежними числами.}$$

5. (7 балів) Кожна діагональ трапеції дорівнює сумі її основ. Знайдіть кут між її діагоналями.

Відповіді та вказівки

Варіант 1



- 1.
2. графік складається з двох променів прямих $y = -3x$ при $x < 0$ і $y = -x$ при $x \geq 0$.

3. Застосуємо нерівність середнього арифметичного і середнього геометричного:

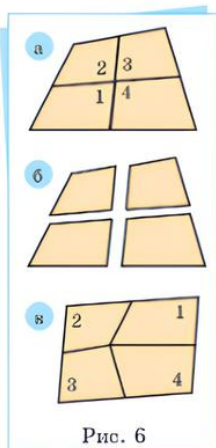
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}. \text{ Аналогічно: } b + c \geq 2\sqrt{bc}, \quad a + c \geq 2\sqrt{ac}.$$

Після того, як перемножимо ліві і праві частини нерівностей, отримаємо те, що і треба було довести.

4. -3
5. $\angle AOC = 180^\circ$, $\angle ADC = 90^\circ$

Варіант 2

- 1.



2. Графік складається з двох променів прямих $y = -2x$ при $x < 2$ і $y = 2x$ при $x > 2$, точка $x = 2$ виколота.

Відповіді та вказівки

3. Розглянемо різницю лівої і правої частини, та запишемо тотожність:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = \frac{1}{2}((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2).$$

Оскільки квадрати будь-яких дійсних чисел не від'ємні, то

$$(a - b)^2 \geq 0, (b - c)^2 \geq 0, (c - a)^2 \geq 0.$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \geq 0, \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

Що і треба було довести.

4. $\emptyset$

5. 90°

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$